Finslerräume von identischer Torsion

Von A. MOÓR in Sopron (Ungarn)

Herrn Professor B. Sz.-Nagy auf seinem 60. Geburtstag gewidmet

§ 1. Einleitung

Es seien $g_{ij}(x, \dot{x})$ und $g^*_{ij}(x, \dot{x})$ die metrischen Grundtensoren der n-dimensionalen Finslerräume F_n und F^*_n. Die Metrik soll im folgenden immer den in den Finslerräumen gewöhnlichen Bedingungen genügen (vgl. [1] I. § 1). Wir definieren die Finslerräume von identischer Torsion durch die folgende

Definition. Die Finslerräume F_n und F^*_n sind Finslerräume von identischer Torsion, falls

(1. 1) $$A^*_{ijk} = \frac{F^*}{F} A_{ijk}$$

gültig ist, wo

(1. 2) $$A_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \frac{F}{2} \partial_{\dot{x}^k} g_{ij} \quad \text{bzw.} \quad A^*_{ijk} \overset{\text{def}}{=} \frac{F^*}{2} \partial_{\dot{x}^k} g^*_{ij}$$

den Torsionstensor und

$$F \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} \quad \text{bzw.} \quad F^* \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g^*_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}$$

die Grundfunktion bedeuten.

Aus (1. 1) und (1. 2) folgt somit, daß in diesen Räumen

(1. 3) $$\partial_{\dot{x}^k} g^*_{ij} = \partial_{\dot{x}^k} g_{ij}$$

besteht und somit g^*_{ij} einer Relation von der Form:

(1. 4) $$g^*_{ij}(x, \dot{x}) = g_{ij}(x, \dot{x}) + \gamma_{ij}(x)$$

genügt, wo $\gamma_{ij}(x)$ einen Tensor bedeutet, der von der Richtung: $\dot{x}^i$ unabhängig ist. Offenbar folgt aus (1. 4) die Relation (1. 1), d.h. (1. 4) ist für die Finslerräume von identischer Torsion charakteristisch.

Im folgenden wollen wir statt des beliebigen, nur vom Orte: x^i abhängigen Tensors γ_{ij} einen Tensor von der Form:

$$\hat{\gamma}_{ij}(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}(p_i q_j + p_j q_i)$$

voraussetzen, wo p_i und q_i im allgemeinen von $(x, \dot{x})$ abhängige kovariante Vektoren bedeuten. Die Forderung, daß der Tensor

$$(1.5) \qquad \hat{g}_{ij} \equiv g_{ij} + \tfrac{1}{2}(p_i q_j + p_j q_i)$$

den Maßtensor eines Finslerschen Raumes $\hat{F}_n$ bestimme, führt auf die charakteristische Gleichung (2. 1), woraus im Falle

$$(1.6) \qquad q_i(x, \dot{x}) = p_i(\dot{x}, \dot{x})$$

gefolgert werden kann, daß p_i nur vom Orte: x^i abhängig ist, d.h. die Finslerräume F_n und $\hat{F}_n$ sind in diesem Falle von identischer Torsion.

Im Paragraphen 3 wollen wir diejenigen Bedingungen bestimmen, die notwendig und hinreichend sind für die Übereinstimmung der geodätischen Linien von F_n und $\hat{F}_n$.

Letztens, im Paragraphen 4, untersuchen wir die $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächen der Finslerräume F_n und $\hat{F}_n$.

§ 2. Charakteristische Relationen für die Finslerräume $\hat{F}_n$

Es seien F_n und $\hat{F}_n$ je ein n-dimensionaler metrischer Linienelementraum (vgl. [2] und [3]) mit den Maßtensoren $g_{ij}(x, \dot{x})$ und $\hat{g}_{ij}(x, \dot{x})$, die miteinander durch die Formel (1. 5) verbunden sind. $p_i(x, \dot{x})$ und $q_i(x, \dot{x})$ bedeuten in (1. 5) kovariante Vektoren. Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß der durch* (1. 5) *bestimmte Tensor $\hat{g}_{ij}$ eine Finslersche Metrik definiere, falls g_{ij} der Grundtensor eines Finslerraumes ist, ist die Relation:*

$$(2.1) \qquad P_{\dot{x}^j} Q_{\dot{x}^i} + Q_{\dot{x}^j} P_{\dot{x}^i} + P_{\dot{x}^i \dot{x}^j} Q + Q_{\dot{x}^i \dot{x}^j} P = p_i q_j + p_j q_i,$$

wo

$$(2.1a) \qquad P \overset{\text{def}}{=} p_i(x, \dot{x})\, \dot{x}^i, \quad Q \overset{\text{def}}{=} q_i(x, \dot{x})\, \dot{x}^i$$

bedeuten, und p_i und q_i in den $\dot{x}^k$ homogen von nullter Dimension sind.

Beweis. Erstens zeigen wir, daß (2. 1) gültig ist, falls g_{ij} und $\hat{g}_{ij}$ Finslersche Metriken bestimmen. Aus (1. 5) folgt nämlich nach einer Überschiebung mit $\dot{x}^i\dot{x}^j$:

$$\hat{F}^2 = F^2 + PQ, \tag{2.2}$$

wo

$$\hat{F}^2 \overset{\text{def}}{=} \hat{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j, \quad F^2 \overset{\text{def}}{=} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

Da $\hat{F}$ und F die Grundfunktionen der entsprechenden Finslerräume $\hat{F}_n$ und F_n mit den Grundtensoren $\hat{g}_{ij}$ und g_{ij} sind, erhält man somit aus (2. 2) nach der Operation: $\frac{1}{2}\partial^2_{\dot{x}^i\dot{x}^j}$:

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + \tfrac{1}{2}(P_{\dot{x}^i\dot{x}^j}Q + Q_{\dot{x}^i\dot{x}^j}P) + \tfrac{1}{2}(P_{\dot{x}^i}Q_{\dot{x}^j} + Q_{\dot{x}^i}P_{\dot{x}^j}), \tag{2. 3}$$

woraus mittels (1. 5) die beweisende Relation (2. 1) unmittelbar folgt.

Nehmen wir jetzt an, daß die Relationen (2. 1) und (1. 5) gültig sind. Wir müssen zeigen, daß dann $\hat{g}_{ij}$ eine Relation von der Form:

$$\hat{g}_{ij} = \tfrac{1}{2}\partial^2_{\dot{x}^i\dot{x}^j}\hat{F}^2$$

genügt, d.h. $\hat{g}_{ij}$ ist der metrische Grundtensor des Finslerraumes $\hat{F}_n$ mit der Grundfunktion $\hat{F}$. Es wird sich zeigen, daß $\hat{F}(x, \dot{x})$ eben durch die Formel (2. 2) angegeben ist. Es folgt nach der Operation $\frac{1}{2}\partial^2_{\dot{x}^i\dot{x}^j}$ angewandt auf die Funktion $(F^2+PQ) \equiv \hat{F}^2$:

$$\tfrac{1}{2}\partial^2_{\dot{x}^i\dot{x}^j}\hat{F}^2 = g_{ij} + \tfrac{1}{2}(P_{\dot{x}^i\dot{x}^j}Q + Q_{\dot{x}^i\dot{x}^j}P) + \tfrac{1}{2}(P_{\dot{x}^i}Q_{\dot{x}^j} + Q_{\dot{x}^i}P_{\dot{x}^j}).$$

Beachten wir jetzt die Relationen (2. 1) und dann (1. 5), so erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\partial^2_{\dot{x}^i\dot{x}^j}\hat{F}^2 = \hat{g}_{ij}$$

w. z. b. w.

Mit Hilfe des fundamentalen Satzes 1, können mehrere Sätze über Finslerräume, die durch (1. 5) miteinander verbunden sind, bewiesen werden. Z. B.:

Satz 2. *Ist in der Relation* (1. 5) p_i *von der Form:*

$$p_i = P_{\dot{x}^i}, \quad P \overset{\text{def}}{=} p_j(x, \dot{x})\dot{x}^j \tag{2. 4}$$

und ist p_i in den $\dot{x}^k$ homogen nullter Dimension, so ist auch

$$q_i = Q_{\dot{x}^i}, \quad Q \overset{\text{def}}{=} q_j(x, \dot{x})\dot{x}^j. \tag{2. 5}$$

Beweis. Aus der Relation (1. 5) folgt nach dem Satz 1 die Relation (2. 1), ferner es muß auch $q_j(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^k$ homogen von nullter Dimension sein, falls g_{ij} und $\hat{g}_{ij}$ in (1. 5) Finslersche Metriken bestimmen. Aus (2. 1) folgt nach einer Überschiebung mit $\dot{x}^j$ auf Grund der Homogenität in den $\dot{x}^k$:

$$PQ_{\dot{x}^i} + QP_{\dot{x}^i} = Pq_i + Qp_i,$$

woraus wegen der Bedingung (2. 4) die Relation (2. 5) unmittelbar folgt, w. z. b. w.

Satz 3. *Gilt in der Relation* (1. 5):

$$p_i(x, \dot{x}) = q_i(x, \dot{x}), \tag{2.6}$$

so ist p_i *von* $\dot{x}^k$ *unabhängig, falls* g_{ij} *und* $\hat{g}_{ij}$ *Finslersche Metriken bestimmen.*

Beweis. Aus (1. 5) folgt nach unserem Satz 1 die Relation (2. 1), die jetzt wegen der Bedingung (2. 6) die Form

$$P_{\dot{x}^i} P_{\dot{x}^j} + P_{\dot{x}^i \dot{x}^j} P = p_i p_j \tag{2.7}$$

haben wird. Da g_{ij} und $\hat{g}_{ij}$ Finslersche Metriken bestimmen, sind sie in den $\dot{x}^k$ homogen von nullter Dimension, folglich ist auch $p_i(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^k$ homogen von nullter Dimension. Dann folgt aber aus unserer letzten Gleichung, nach einer Überschiebung mit $\dot{x}^j$ und in Hinsicht auf (2. 1a):

$$P_{\dot{x}^i \dot{x}^j} \dot{x}^j = 0, \quad p_i = P_{\dot{x}^i}.$$

Die Relation (2. 7) reduziert sich somit auf $P_{\dot{x}^i \dot{x}^j} = 0$, woraus $p_i = P_{\dot{x}^i} = p_i^*(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ folgt, w. z. b. w.

Satz 4. *Ist in* (1. 5) p_i *nur vom Orte* x^k *abhängig, so ist* q_i *auch nur vom Orte* x^k *abhängig und von* $\dot{x}^k$ *unabhängig.*

Beweis. Nach der Annahme des Satzes folgt

$$p_i = p_i(x) = P_{\dot{x}^i}, \quad P \equiv p_k(x) \dot{x}^k.$$

Nach dem Satz 2 ist somit

$$q_i = Q_{\dot{x}^i}, \quad Q = q_k(x, \dot{x}) \dot{x}^k.$$

Aus (1. 5) folgt nun wegen $p_{i \dot{x}^k} = 0$ nach einer partiellen Ableitung nach $\dot{x}^k$:

$$\partial_{\dot{x}^k} \hat{g}_{ij} = \partial_{\dot{x}^k} g_{ij} + \tfrac{1}{2}(p_i Q_{\dot{x}^j \dot{x}^k} + p_j Q_{\dot{x}^i \dot{x}^k}). \tag{2.8}$$

In den Finslerräumen gilt nun bekanntlich

$$(\partial_{\dot{x}^k} \hat{g}_{ij}) \dot{x}^i \equiv 0, \quad (\partial_{\dot{x}^k} g_{ij}) \dot{x}^i \equiv 0;$$

somit bekommt man aus (2. 8) nach einer Überschiebung mit $\dot{x}^i$ in Hinsicht auf die Homogenität nullter Dimension von $q_i(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$: d.h. $Q_{\dot{x}^i \dot{x}^j} \dot{x}^i = 0$,

$$p_i(x) \dot{x}^i Q_{\dot{x}^j \dot{x}^k} = 0,$$

woraus $Q_{\dot{x}^j \dot{x}^k} = 0$ folgt, und das beweist schon den Satz.

Die beiden letzten Sätze bestimmen also solche Räume F_n und $\hat{F}_n$, die nach unserer Definition im Paragraphen 1. von identischer Torsion sind. Der Zusammenhang der metrischen Grundtensoren ist durch die Relation (1. 5) festgelegt, die sich im Falle $p_i = q_i$ auf

$$\hat{g}_{ij}(x, \dot{x}) = g_{ij}(x, \dot{x}) + p_i(x) p_j(x)$$

reduziert. Selbstverständlich kann im allgemeinen Fall, d.h. beim Typ (1. 5) p_i bzw. q_i von den $\dot{x}^k$ abhängig sein. Z. B. in trivialer Weise ist (2. 1) erfüllt, falls p_i und q_i die Form:

$$p_i = f_i(x)\,h(\dot{x}), \quad q_i = f_i^*(x)\,h^{-1}(\dot{x})$$

haben. F_n und $\hat{F}_n$ sind in diesem Falle von identischer Torsion.

Die Relation (2. 1) war notwendig und hinreichend dafür, daß $\hat{F}_n$ mit dem Maßtensor $\hat{g}_{ij}$ ein Finslerraum sei, falls g_{ij} der Maßtensor eines solchen Raumes war. Wir geben statt (2. 1) noch eine andere hinreichende Bedingung dafür, daß $\hat{F}_n$ ein Finslerraum sei.

Satz 5. *Ist in der Formel* (1. 5) g_{ij} *der Grundtensor eines Finslerraumes, so ist:*

$$p_k Q_{\dot{x}^i} + q_k P_{\dot{x}^i} + p_{k\dot{x}^i} Q + q_{k\dot{x}^i} P = p_i q_k + p_k q_i \tag{2. 9}$$

— *wo P und Q durch* (2. 1a) *festgelegt sind, ferner* p_i *und* q_i *in den* $\dot{x}^k$ *homogen von nullter Dimension sind — hinreichend dafür, daß* $\hat{g}_{ik}$ *eine Finslersche Metrik bestimme.*

Beweis. Wir überschieben die Bedingungsgleichung (2. 9) mit $\dot{x}^k$. Wegen der Homogenität in den $\dot{x}^j$ wird:

$$PQ_{\dot{x}^i} + QP_{\dot{x}^i} + (P_{\dot{x}^i} - p_i)Q + (Q_{\dot{x}^i} - q_i)P = p_i Q + q_i P,$$

die in der From $p_k Q + q_k P = PQ_{\dot{x}^k} + P_{\dot{x}^k} Q$ geschrieben werden kann, wo wir statt des Index „i" den Index „k" gesetzt haben. Differenzieren wir nun die letzte Gleichung partiell nach $\dot{x}^i$, beachten wir die Bedingungsgleichung (2. 9), so wird:

$$p_i q_k + p_k q_i = P_{\dot{x}^i \dot{x}^k} Q + Q_{\dot{x}^i \dot{x}^k} P + P_{\dot{x}^i} Q_{\dot{x}^k} + P_{\dot{x}^k} Q_{\dot{x}^i}.$$

Offenbar ist diese Gleichung mit (2. 1) identisch, somit folgt nach Satz 1 auch der Satz 5.

Wir gehen jetzt zur Bestimmung der kontravarianten Komponenten des Maßtensors $\hat{g}_{ik}$ über. Kürze halber bezeichnen wir im folgenden durch h_{ij} den Ausdruck:

$$h_{ij} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(p_i q_j + p_j q_i).$$

Es sei p^{kj} die Abweichung des Tensors $\hat{g}^{kj}$ von g^{kj}. Es ist somit:

$$\hat{g}^{kj} = g^{kj} + p^{kj}. \tag{2. 10}$$

Offenbar ist p^{kj} in ihren Indizes symmetrisch, ferner es gilt nach der gewöhnlichen Definition des kontravarianten Maßtensors:

$$(g_{ij} + h_{ij})(g^{kj} + p^{kj}) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad i = j, \\ 0, & \text{wenn} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Beachten wir jetzt, daß auch $g_{ij}g^{kj}=\delta_i^k$ ist, so bekommen wir für p^{kj} die Gleichung:

$$(g_{ij}+h_{ij})p^{kj} = -h_i^k \equiv -h_{ij}g^{kj}.$$

Angenommen, daß Det $|g_{ij}+h_{ij}| \neq 0$, wird

$$(g_{ij}+h_{ij})Q^{im} = \delta_j^m$$

für Q^{im} eindeutig lösbar. Mit Hilfe von Q^{im} wird dann offensichtlich $p^{km}=-h_i^k Q^{im}$, womit nach (2. 10) der Tensor $\hat{g}^{kj}$ vollständig bestimmt ist.

§ 3. Übereinstimmende geodätische Linien

In diesem Paragraphen wollen wir solche Bedingungen bestimmen, die notwendig und hinreichend sind dafür, daß eine geodätische Linie von F_n auch bezüglich der Metrik von $\hat{F}_n$ eine geodätische Linie sei.

Die geodätischen Linien genügen der Differentialgleichung

$$\text{(3. 1)} \qquad \frac{\ddot{x}^i+2G^i(x,\dot{x})}{\dot{x}^i} = \frac{\ddot{x}^k+2G^k(x,\dot{x})}{\dot{x}^k} \qquad (i,k=1,2,\dots,n),$$

wo

$$G^h \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{4} g^{hj}(\partial_k g_{ij}+\partial_i g_{jk}-\partial_j g_{ik})\dot{x}^i\dot{x}^k$$

bedeutet (vgl. [1], IV. (8. 2), III. (1. 26) und II. (2. 3)). Offenbar ist (3. 1) eine parameterinvariante Form der geodätischen Linien. Bezeichnen $\hat{G}^i$ $(i=1,2,\dots,n)$ die die geodätischen Linien bestimmenden Funktionen des Finslerraumes $\hat{F}_n$, ferner sind diese Linien auch für F_n geodätisch, so hängen $\hat{G}^h$ und G^h durch die Formeln

$$\text{(3. 2)} \qquad \hat{G}^h = G^h+\dot{x}^h\psi(x,\dot{x})$$

zusammen, wo $\psi(x,\dot{x})$ einen Skalar bedeutet der in den $\dot{x}^k$ homogen von erster Dimension ist.

Wir berechnen jetzt $\hat{G}^i$ falls (1. 5) gilt. Nach (1. 5) und (2. 10) ist:

$$\text{(3. 3)} \qquad \hat{G}^h \equiv \hat{g}^{hj}\hat{G}_j = (g^{hj}+p^{hj})(G_j+[ijk]\dot{x}^i\dot{x}^k),$$

wo

$$G_j \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(\partial_k g_{ij}-\tfrac{1}{2}\partial_j g_{ik})\dot{x}^i\dot{x}^k, \quad \hat{G}_j \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(\partial_k \hat{g}_{ij}-\tfrac{1}{2}\partial_j \hat{g}_{ik})\dot{x}^i\dot{x}^k$$

$$[ijk] \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{4}(q_j\partial_k p_i+p_i\partial_k q_j+q_i\partial_k p_j+p_j\partial_k q_i-q_k\partial_j p_i-p_i\partial_j q_k)$$

bedeuten. Schreiben wir nun (3. 3) in der Form:

$$\text{(3. 4)} \qquad \hat{G}^h = G^h+p^{hj}G_j+(g^{hj}+p^{hj})[ijk]\dot{x}^i\dot{x}^k,$$

so haben wir eine fundamentale Formel erhalten, die den Zusammenhang von $\hat{G}^h$

und G^h bestimmt, falls die metrischen Grundtensoren von F_n und $\hat{F}_n$ miteinander durch (1. 5) verbunden sind.

Substituieren wir nun $\hat{G}^h$ aus (3. 2) in (3. 4), so wird nach einer Überschiebung mit $g_{hs}\dot{x}^s$:

$$\psi = \frac{1}{F^2}\{p^{hj}g_{hs}\dot{x}^s G_j + (\dot{x}^j + p^{hj}g_{hs}\dot{x}^s)[ijk]\dot{x}^i\dot{x}^k\}. \tag{3. 5}$$

Setzen wir das in (3. 2), ferner beachten wir (3. 4), so erhält man die Differentialgleichung:

$$p^{hj}G_j + (g^{hj}+p^{hj})[ijk]\dot{x}^i\dot{x}^k = \frac{\dot{x}^h}{F^2}\{p^{tj}g_{ts}\dot{x}^s G_j + (\dot{x}^j + p^{tj}g_{ts}\dot{x}^s)[ijk]\dot{x}^i\dot{x}^k\}, \tag{3. 6}$$

die offenbar notwendig ist, falls $x^i(t)$ sowohl für F_n wie auch für $\hat{F}_n$ geodätische Linie sein soll.

Die Relation (3. 6) ist aber auch hinreichend dafür, daß wenn $x^i(t)$ eine geodätische Linie von F_n ist, dann auch eine solche von $\hat{F}_n$ sei. Nach (3. 4) und (3. 6) folgt nämlich, daß $\hat{G}^h$ die Form (3. 2) hat, wo ψ durch (3. 5) angegeben ist. Genügt also die Kurve $x^i(t)$ der Gleichung (3. 1), so genügt sie auch der analogen Gleichung mit $\hat{G}^i$.

Unsere Resultate können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 6. *Die Gleichung* (3. 6) *ist notwendig und hinreichend dafür, daß die geodätische Linie von F_n auch geodätische Linie von $\hat{F}_n$ sei.*

§ 4. Hyperflächen bezüglich der Metriken g_{ij} und $\hat{g}_{ij}$

Eine Hyperfläche F_{n-1} eines Finslerraumes F_n ist eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Linienelemente $(u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$,[1] deren Raumkomponenten durch die Gleichungen

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$$

$$\dot{x}^i = B^i_\alpha \dot{u}^\alpha, \quad B^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$$

festgelegt sind.

Der metrische Grundtensor von F_{n-1} ist

$$a_{\alpha\beta} = g_{ij}\big(x^k(u), B^k_\gamma \dot{u}^\gamma\big) B^i_\alpha B^j_\beta;$$

[1]) Griechische Indizes bedeuten im folgenden immer die Zahlen $1, 2, \ldots, (n-1)$.

auf Grund von (1. 5) wird:

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = \hat{g}_{ij} B^i_\alpha B^j_\beta = a_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}(p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha),$$

wo $p_\alpha = p_i B^i_\alpha$ bzw. $q_\alpha = q_i B^i_\alpha$ die Projektion von p_i bzw. q_i bedeutet.

Die Normalvektoren bezüglich der Metriken g_{ij} und $\hat{g}_{ij}$ sind durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} g_{ij} N^i B^j_\alpha &= 0 \\ g_{ij} N^i N^j &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \hat{g}_{ij} \hat{N}^i B^j_\alpha &= 0 \\ \hat{g}_{ij} \hat{N}^i \hat{N}^j &= 1 \end{aligned}\right\}$$

fesgelegt.

Wir beweisen den folgenden

Satz 7. *Stehen p_i und q_i zu den Vektoren B^i_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, m-1$) normal, so sind $\hat{N}^i$ und N^i bis auf einen skalaren Faktor identisch.*

Beweis. In einem Linienelement $(u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$ von F_{n-1} gilt nach der Annahme:

$$p_i B^i_\alpha = 0, \quad q_i B^i_\alpha = 0, \tag{4.1}$$

woraus folgt, daß

$$\hat{g}_{ij} B^i_\alpha \hat{N}^j = \left(g_{ij} + \tfrac{1}{2}(p_i q_j + p_j q_i)\right) B^i_\alpha \hat{N}^j = g_{ij} B^i_\alpha \hat{N}^j \tag{4.2}$$

ist. Da N^i und $\hat{N}^i$ Normalvektoren bezüglich der entsprechenden Metriken sind, ist

$$g_{ij} B^i_\alpha N^j = 0, \quad \hat{g}_{ij} B^i_\alpha \hat{N}^j = 0. \tag{4.3}$$

Auf Grund von (4. 2) ist somit $g_{ij} B^i_\alpha \hat{N}^j = 0$, die mit (4. 3) zusammen beweist, daß

$$\hat{N}^j = \lambda N^j \tag{4.4}$$

ist, wo λ einen Skalar bedeutet. Unsere letzte Formel drückt aber schon den Satz aus.

Bemerkung. Die Behauptung des Satzes 7, genau gesagt: die Formel (4. 4) gilt auch dann, wenn statt (4. 1) die schwächere Bedingungen

$$(p_i q_j + p_j q_i) B^i_\alpha \hat{N}^j = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{4.5}$$

gelten. Offenbar ist auch jetzt (4. 2) gültig, woraus (4. 4) — wie vorher — abgeleitet werden kann. —

Nun wollen wir die geodätischen Linien der Hyperfläche F_{n-1} charakterisieren und das Analogon des im Paragraphen 3 behandelten Problems untersuchen.

Die Gleichung der geodätischen Linien einer Hyperfläche hat die Form:

$$\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} + 2G^\alpha\left(u, \frac{du}{ds}\right) = 0, \tag{4.6}$$

wo der Parameter s die Bogenlänge bedeutet und

$$2G^{\alpha}(u,\dot{u}) = B^{\alpha}_{i}(B^{i}_{\gamma\beta}+\Gamma^{*i}_{hk}B^{h}_{\gamma}B^{k}_{\beta})\dot{u}^{\beta}\dot{u}^{\gamma} \equiv 2G^{i}B^{\alpha}_{i}+B^{\alpha}_{i}B^{i}_{\beta\gamma}\dot{u}^{\beta}\dot{u}^{\gamma}, \quad B^{i}_{\beta\gamma} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^{\beta}\partial u^{\gamma}} \tag{4.7}$$

ist (vgl. [1] Kap. V. § 3.)[2]). In parameterinvarianter Form lautet bekanntlich (4. 6) wie folgt:

$$\left(\ddot{u}^{\alpha}+2G^{\alpha}(u,\dot{u})\right)\dot{u}^{\beta} = \left(\ddot{u}^{\beta}+2G^{\beta}(u,\dot{u})\right)\dot{u}^{\alpha}. \tag{4.8}$$

Da für die Raumkoordinaten

$$\dot{x}^i = B^i_{\beta}\dot{u}^{\beta}, \quad \ddot{x}^i = B^i_{\beta\gamma}\dot{u}^{\beta}\dot{u}^{\gamma}+B^i_{\beta}\ddot{u}^{\beta}$$

besteht, wird man nach einer Überschiebung mit B^{α}_{i}, auf Grund der Relation:

$$B^i_{\beta}B^{\alpha}_{i} = \delta^{\alpha}_{\beta},$$

die folgende Formel bekommen:

$$\ddot{u}^{\alpha} = B^{\alpha}_{i}\ddot{x}^i - B^{\alpha}_{i}B^i_{\beta\gamma}\dot{u}^{\beta}\dot{u}^{\gamma}. \tag{4.9}$$

Setzen wir G^{α} und $\ddot{u}^{\alpha}$ aus (4. 7) und (4. 9) in die Gleichung (4. 8), so wird nach einer kleinen Umformung:

$$(\ddot{x}^i+2G^i)(B^{\alpha}_{i}\dot{u}^{\beta}-B^{\beta}_{i}\dot{u}^{\alpha}) = 0 \tag{4.10}$$

eben die Gleichung der flächengeodätischen Linien sein.

Auf Grund von (3. 4) ist nun

$$G^h = \hat{G}^h - p^{hj}G_j - (g^{hj}+p^{hj})[ijk]\dot{x}^i\dot{x}^k.$$

Substituiert man das in die Gleichung (4. 10), so wird:

$$\{\ddot{x}^i+2\hat{G}^i-2p^{ij}G_j-2(g^{ij}+p^{ij})[tjk]\dot{x}^t\dot{x}^k\}(B^{\alpha}_{i}\dot{u}^{\beta}-B^{\beta}_{i}\dot{u}^{\alpha}) = 0. \tag{4.11}$$

Da die Gleichung der flächengeodätischen Linien bezüglich der Metrik $\hat{g}_{ij}$ analog zur Formel (4. 10) die Form:

$$(\ddot{x}^i+2\hat{G}^i)(B^{\alpha}_{i}\dot{u}^{\beta}-B^{\beta}_{i}\dot{u}^{\alpha}) = 0$$

hat, folgt aus (4. 11) unmittelbar der

Satz 8. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die geodätische Linie $u^{\alpha}(t)$ einer Hyperfläche F_{n-1} auch bezüglich der Metrik $\hat{g}_{ij}$ geodätische Linie sei, sind die Relationen:*

$$\{p^{ij}G_j+(g^{ij}+p^{ij})[tjk]\dot{x}^t\dot{x}^k\}(B^{\alpha}_{i}\dot{u}^{\beta}-B^{\beta}_{i}\dot{u}^{\alpha}) = 0. \tag{4.12}$$

---

[2]) In der Formel V. (3.14) von [1] ist selbstverständlich: $B^h_{\beta}\dot{u}^{\beta}=\dot{x}^h$, $\Gamma^{*i}_{hk}\dot{x}^h\dot{x}^k=2\,G^i$.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß die Gleichung (4. 12) erfüllt ist, falls die Relation

$$p^{ij} G_j + (g^{ij} + p^{ij})[tjk] \dot{x}^t \dot{x}^k = \dot{x}^i \psi(x, \dot{x})$$

besteht, wo $\psi(x, \dot{x})$ einen Skalar bedeutet, da nach unserer Annahme über $\dot{x}^i$, die Formel

$$B_i^\beta \dot{x}^i = \dot{u}^\beta$$

gültig ist.

Literatur

[1] HANNO RUND, *The differential geometry of Finsler spaces,* Springer-Verlag (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1959).

[2] A. MOÓR, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math.,* **17** (1956), 85—120.

[3] A. MOÓR, Eine Verallgemeinerung der metrischen Übertragung in allgemeinen metrischen Räumen, *Publ. Math. Debrecen,* **10** (1963), 145—150.

(Eingegangen am 9. Februar, 1972)